# Penyelesaian Persamaan Linear Simultan
## Metode Eliminasi Gauss Seidel

Ahmad Zainudin, S.ST, M.T
Workshop Metode Numerik

2014

# Konsep Metode Eliminasi Gauss Seidel

- **Metode Eliminasi Gauss Seidel** adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah.

Bila diketahui persamaan linear simultan :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \dots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \dots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \dots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \dots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

# Konsep Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Hitung nilai xi untuk (i=1 s/d n)

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots. - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2^2}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots. - a_{2n}x_n\right)$$

......................................................................

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots. - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

- Proses iterasi dihentikan bila selisih nilai xi (i=1 s/d n) dengan nilai xi pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai yoleransi error yang ditentukan

# Algoritma Metode Eliminasi Gauss Seidel

(1) Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya *n*

(2) Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*

(3) Tentukan toleransi error ε

(4) Tentukan nilai awal dari $x_i$, untuk i=1 s/d n

(5) Simpan $x_i$ dalam $s_i$, untuk i=1 s/d n

(6) Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j\right)$$

$$e_i = \left|x_i - s_i\right|$$

(7) iterasi ← iterasi+1

(8) Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah $x_i$ untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Tentukan Ordo dan Masukkan matrik A

```
printf("Tentukan ordo matrik : ");
scanf("%d",&n);
printf("Masukkan matrik A : \n");
for(i=0;i<n;i++){
        for(j=0;j<n;j++){
                printf("Matrik A[%d][%d] : ",i+1,j+1);
                scanf("%lg",&A[i][j]);
        }
}
```

- Masukkan matrik B

```
printf("Masukkan matrik vektor B : \n");
for(i=0;i<n;i++){
        printf("Matrik B[%d] : ",i+1);
        scanf("%lg",&B[i]);
        A[i][j]=B[i];
}
```

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Cetak Augmented Matrik [A|B]

```
printf("Augmented matrik [A|B] : \n");
for(i=0;i<n;i++){
        for(j=0;j<n+1;j++){
                printf("%4lg",A[i][j]);
        }
        printf("\n");
};
```

- Masukkan jumlah iterasi, toleransi error dan nilai awal

```
printf("Masukkan jumlah iterasi    : ");
scanf("%d",&iterasi);
printf("Tentukan toleransi error : ");
scanf("%lg",&error);
printf("Masukkan nilai awal: ");
scanf("%lg",&nilai);
for(i=0;i<n;i++){
        nilai_awal[i]=nilai;
}
```

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Cetak Header dan Tabel

```
printf("i\t");
for(i=0;i<n;i++){
        printf("x[%d]\t",i+1); //cetak header x[i]
}
for(i=0;i<n;i++){
        printf("e[%d]\t",i+1);  //cetak header e[i]
}

printf("\n");
printf("======================================================\n");

//cetak tabel
i=0;
printf("%d",i);

for(i=0;i<n;i++){  //tabel baris pertama
        printf("\t%.4lg",nilai_awal[i]);
}
printf("\n");
```

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Proses Iterasi dan Proses Gauss-Seidel

```
//proses iterasi
for(k=1;k<=iterasi;k++)
{
        printf("%d",k);

        //proses gauss-seidel
        for(i=0;i<n;i++)
        {
                sigma = 0;
                for(j=0;j<n;j++)
                {
                        if(i!=j)
                        {
                                sigma = sigma + nilai_awal[j] * A[i][j];
                        }
                }

                hasil[i] = (A[i][n] - sigma)/A[i][i];
                temp[i] = nilai_awal[i];
                nilai_awal[i] = hasil[i];

                printf("\t%.4lg",nilai_awal[i]);
        }


        //cetak error dan pengecekan error
        for(i=0;i<n;i++)
        {

                printf("\t%.4lg",fabs(temp[i]-hasil[i]));
                if(fabs(temp[i]-hasil[i])<=error)
                {
                        printf("\n");
                        exit(1);
                }
        }

        printf("\n");

}
```

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Cetak Hasil

```
printf("\n");

printf("Hasil : \n"); //cetak hasil
for(i=0;i<n;i++)
{
        printf("x[%d] : %lg\n",i+1,nilai_awal[i]);
}
```

# Program Metode Eliminasi Gauss Seidel

- Tampilan Program

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

```
c:\Data\Workshop Metode Numerik\Program>gauss_seidel
Tentukan ordo matrik : 2
Masukkan matrik A :
Matrik A[1][1] : 1
Matrik A[1][2] : 1
Matrik A[2][1] : 2
Matrik A[2][2] : 4
Masukkan matrik vektor B :
Matrik B[1] : 5
Matrik B[2] : 14
Augmented matrik [A|B] :
   1   1   5
   2   4  14
Masukkan jumlah iterasi    : 10
Tentukan toleransi error : 0.001
Masukkan nilai awal: 0
i       x[1]    x[2]    e[1]    e[2]
=======================================================
0       0       0
1       5       1       5       1
2       4       1.5     1       0.5
3       3.5     1.75    0.5     0.25
4       3.25    1.875   0.25    0.125
5       3.125   1.938   0.125   0.0625
6       3.063   1.969   0.0625  0.03125
7       3.031   1.984   0.03125 0.01563
8       3.016   1.992   0.01563 0.007813
9       3.008   1.996   0.007813        0.003906
10      3.004   1.998   0.003906        0.001953

Hasil :
x[1] : 3.00391
x[2] : 1.99805
```

# Contoh Metode Iterasi Gauss Seidell

Selesaikan sistem persamaan linier:

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

$$x_1 = 5 - x_2$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2x_1\right)$$

nilai awal : x1 = 0 dan x2 = 0

iterasi 1 :

$$x_1 = 5 - 0 = 5$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.5\right) = 1$$

iterasi 2 :

$$x_1 = 5 - 1 = 4$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2}$$

iterasi 3 :

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

iterasi 4 :

$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

iterasi 5 :

$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

iterasi 6 :

$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

iterasi 7 :

$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

Nilai interasi ke-7 sudah tidak berbeda jauh dengan nilai interasi ke-6 maka proses dihentikan dan diperoleh penyelesaian:

- Studi Kasus Persamaan Linier Simultan

# Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan

Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

Model Sistem Persamaan Linier Simultan :

Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:

$x_1$ adalah jumlah boneka A

$x_2$ adalah jumlah boneka B

Perhatikan dari pemakaian bahan :

B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80

B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36

Diperoleh model sistem persamaan linier

$$\boxed{\begin{array}{l} 10\,x_1 + 5\,x_2 = 80 \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 = 36 \end{array}}$$

# Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan

Penyelesaian dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut :

Augemented Matrik

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 80 |
| 2 | 6 | 36 |

B1 <-- B1/10

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 8 |
| 2 | 6 | 36 |

B2 <-- B2 - 2 B1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 8 |
| 0 | 5 | 20 |

B2 <-- B2/5

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 8 |
| 0 | 1 | 4 |

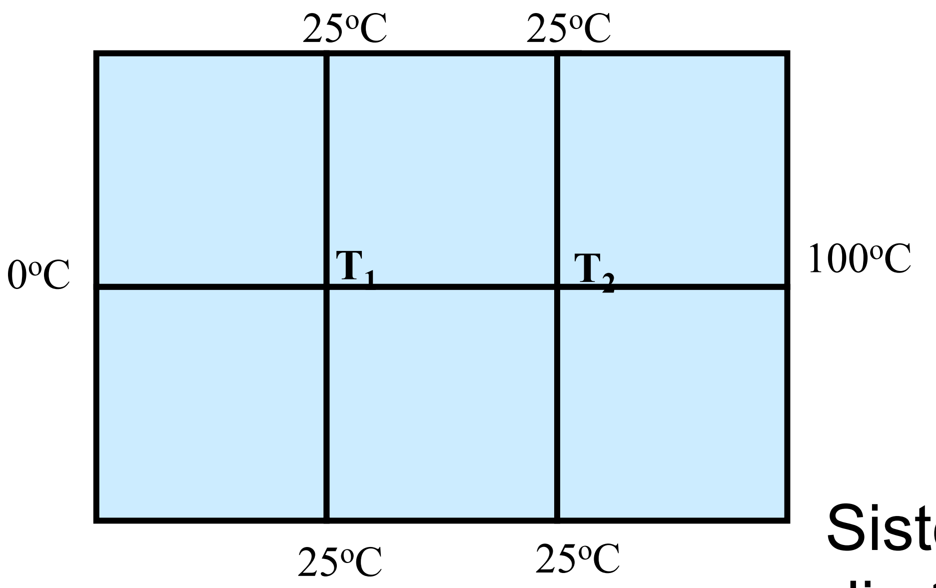
B1 <-- B1 - 0,5 B2

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 4 |

Diperoleh $x_1 = 6$ dan $x_2 = 4$, artinya bahan yang tersedia dapat dibuat 6 boneka A dan 4 boneka B.

# Permasalahan aliran panas pada plat baja

Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panans dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik *T1* dan *T2* sebagai berikut:




Persamaan panas pada titik T1 dan T2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(25 + 0 + 25 + T_2\right)$$

$$T_2 = \tfrac{1}{4}\left(25 + T_1 + 25 + 100\right)$$

Sistem persamaan linier dari permasalahan di atas adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}}$$

# Permasalahan aliran panas pada plat baja

Penyelesaian dengan menggunakan iterasi Gauss-Seidel, terlebih dahulu ditentukan nilai pendekatan awal $T_1=0$ dan $T_2=0$ dan fungsi pengubahnya adalah :

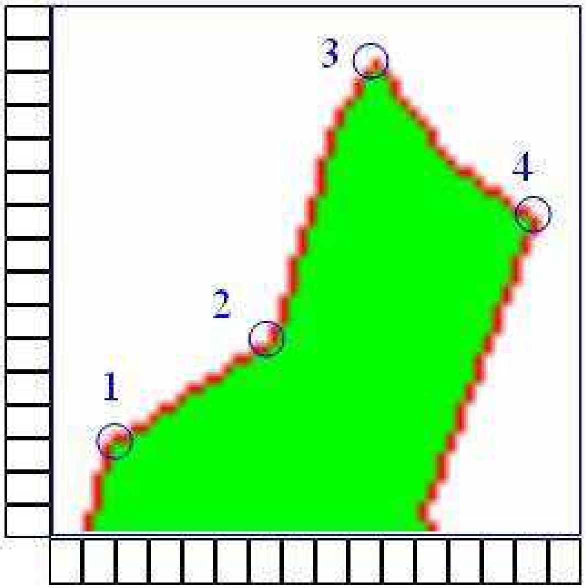
$$T_1 = \frac{1}{4}(50 + T_2)$$

$$T_2 = \frac{1}{4}(150 + T_1)$$

Diperoleh hasil perhitungan untuk toleransi error 0.0001 sebagai berikut :

| Iterasi | x1 | x2 | e1 | e2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | - | - |
| 1 | 12,5 | 40,625 | 12,5 | 40,625 |
| 2 | 22,65625 | 43,16406 | 10,15625 | 2,539063 |
| 3 | 23,29102 | 43,32275 | 0,634766 | 0,158691 |
| 4 | 23,33069 | 43,33267 | 0,039673 | 0,009918 |
| 5 | 23,33317 | 43,33329 | 0,00248 | 0,00062 |
| 6 | 23,33332 | 43,33333 | 0,000155 | 3,87E-05 |
| 7 | 23,33333 | 43,33333 | 9,69E-06 | 2,42E-06 |

Jadi temperatur pada T1=23,3333 dan T2=43,3333




# Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

Perhatikan ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan denganlebih halus.Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d

Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d

Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d

Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d